Exercice 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f \star g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n}(f \star g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f \star g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f \star g = g \star f$.*

convolution

Théorème
f positif et mesurable

$$\int_\Omega f\,d\mu < \infty \Leftrightarrow f < \infty \ \mu \text{ presque partout}$$

2.) $$\int_{\mathbb{R}^n} |(f \star g)(x)|\,d\delta_n(x) < \infty$$

$\Rightarrow f \star g < \infty$ presque partout

Fubini-Lesgue

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (***Théorème de Fubini-Tonelli***)

Pour toute fonction mesurable **positive** *f sur $E \times F$,*

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \left(\int_F f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Théorème (***Théorème de Fubini-Lebesgue***)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \to \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités ($\boxed{*}$) reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty.$$

$$\boxed{|x \cdot y| = |x|\cdot|y|}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(y)\cdot g(x-y)|\,d(\delta_n\otimes\delta_n)(x,y) \leq \quad \Leftarrow \text{Fubini-Tonelli}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\cdot|g(x-y)|\,d\delta_n(x)\right)d\delta_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,d\delta_n(x)\,d\delta_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,d\delta_n(x)\right) d\delta_n(y)$$

Linéarité de l'intégral

$$\boxed{\int a f\,d\mu = a\int f\,d\mu}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,d\delta_n(x)}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,d\delta_n(y)}_{<\infty} < \infty$$

$< \infty$

3.) $$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$y \mapsto x - y$$

$$y \xrightarrow{\cdot(-1)} \cdot \xrightarrow{+x} \Psi(y) \xrightarrow{-x} \cdot \xrightarrow{\cdot(-1)} y$$

$$\Psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$y \mapsto (y - x)\cdot(-1) = x - y$$

$$\Psi^{-1}(\Psi(y)) = \Psi^{-1}(x-y) = x - (x-y) = y \ \checkmark$$

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 = \Psi_1 \\ x_2 - y_2 = \Psi_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n = \Psi_n \end{pmatrix}$$

$$J\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\Psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -E_n \in \text{continue} \Rightarrow \det J\Psi = (-1)^n$$

$\Rightarrow \Psi$

$$|\det J\Psi| = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3$$

$\Psi : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$
est partiellement dérivable
et tous les dérivées partielles
sont continues $\Rightarrow \in C^1$

dérivable

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f \star g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n}(f \star g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f \star g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f \star g = g \star f$.*

$$g \star f = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\cdot f(x-y)\,d\delta_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi^{-1}(\Psi(y)))\, f(\Psi(y))\cdot \underbrace{|\det J\Psi|}_{=1}\,d\delta_n(y) =$$

Cas des intégrales multiples [modifier | modifier le code]

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace φ par une injection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ. On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_U f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi^{-1}(y))\cdot f(y)\,d\delta_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\cdot f(y)\,d\delta_n(y) = f \star g$$

$$\int \Psi(y)^7 \cdot \cos(\Psi(y))\cdot|\det J\Psi|\,d\delta_y^n$$

$$= \int y^7 \cdot \cos(y)\,d\delta_y^n$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie. On utilisera systématiquement les notations classiques $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\leq k\leq n}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ en supposant de plus que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et que $p_k > 0$ pour chaque k. On a donc $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

1. *On suppose que $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\leq k\leq n}$ et que $Y \rightsquigarrow (q_\ell, y_\ell)_{1\leq \ell\leq m}$. Montrer que X et Y ont même loi (c'est-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si $m = n$, $p_1 = q_1$, …, $p_n = q_n$ et $x_1 = y_1$, …, $x_n = y_n$.*
2. *Vérifier que pour tout t,*
$$\Phi_X(t) = p_1 e^{itx_1} + \ldots + p_n e^{itx_n}.$$
3. *En déduire que ses parties réelles et imaginaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que la kième dérivée vérifie $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.*

$$\Phi_X'(t) = \left(p_1 e^{itx_1} + \ldots + p_n e^{itx_n}\right)' =$$

$$= i\cdot x_1 \cdot p_1 e^{itx_1} + \ldots + i\cdot x_n\, p_n\, e^{itx_n}$$

$$\Phi_X''(t) = i^2 x_1^2 \cdot p_1 e^{itx_1} + \ldots + i^2 x_n^2\, p_n\, e^{itx_n}$$

2.3) À montrer: $\forall k \in \mathbb{N}$: $$\Phi_X^{(k)}(t) = i^k \cdot x_1^k \cdot p_1 e^{itx_1} + \ldots + i^k \cdot x_n^k \cdot p_n \cdot e^{itx_n}$$

Démonstration par récurrence:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Phi_X^{(k)}(t=0) = i^k \cdot x_1^k \cdot p_1 \cdot e^0_{i1} + \ldots + i^k \cdot x_n^k\, p_n \cdot e^0_{i1}$$

$$= i^k \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i\right)$$

$$= i^k \cdot \mathbb{E}[X^k]$$

Théorème de transfert

Forme abstraite

Le théorème de transfert est un théorème fondamental en théorie des probabilités qui permet d'exprimer l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire X en fonction d'une intégrale contre la loi de X. Sa forme générale est la suivante :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie. On utilisera systématiquement les notations classiques $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\leq k\leq n}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ en supposant de plus que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et que $p_k > 0$ pour chaque k. On a donc $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

1. *On suppose que $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\leq k\leq n}$ et que $Y \rightsquigarrow (q_\ell, y_\ell)_{1\leq \ell\leq m}$. Montrer que X et Y ont même loi (c'est-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si $m = n$, $p_1 = q_1$, …, $p_n = q_n$ et $x_1 = y_1$, …, $x_n = y_n$.*
2. *Vérifier que pour tout t,*
$$\Phi_X(t) = p_1 e^{itx_1} + \ldots + p_n e^{itx_n}.$$
3. *En déduire que ses parties réelles et imaginaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que la kième dérivée vérifie $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.*

$$\mathbb{E}[e^{X^3} + \ldots$$
$$= \sum_i e^{x_i^3}$$

Théorème de

Théorème : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabiblités et soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire dont la loi est notée $\mathbb{P}_X$. Alors :

- pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a
$$\int_\Omega \varphi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)d\mathbb{P}_X(x).$$
- pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable, alors $\varphi \circ X$ est intégrable par rapport à la mesure $d\mathbb{P}$ si et seulement si φ est intégrable par rapport à la mesure $d\mathbb{P}_X$, et dans ce cas
$$\int_\Omega \varphi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)d\mathbb{P}_X(x).$$

Variable discrète

Pour une variable aléatoire discrète X à valeurs par exemple dans $\mathbb{N}$, le théorème de transfert est simplement l'égalité plus simple suivante :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{n\geq 0} \varphi(n)\mathbb{P}(X = n).$$

Variable à densité

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f, le théorème de transfert donne :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)dx.$$

$$i^2 = -1$$

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{j=1}^n e^{itx_j}\cdot p_j$$

Définition

Théorème de